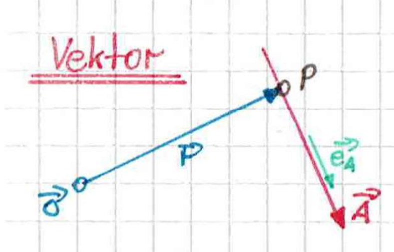
Vektor



$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$; P : Aufpunkt

$\vec{r}$: Ortsvektor; $\vec{e}$: Einheitsvektor

$\vec{0}$: Ursprung;

$\vec{e_A} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$; $|\vec{e}| = 1$; $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Addition, Subtraktion:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \pm B_x \\ A_y \pm B_y \\ A_z \pm B_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\gamma$$

oder

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$



speziel: $\vec{A} \bullet \vec{A} = |\vec{A}|^2$

$\vec{B}$, γ, $\vec{A}$, $|\vec{B}| \cdot \cos\gamma$

Vektorprodukt:

a) $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\gamma$

b) „Rechtsschraubensystem"

c) $\vec{A} \times \vec{B}$ senkrecht auf $\vec{A}$ <u>und</u> $\vec{B}$

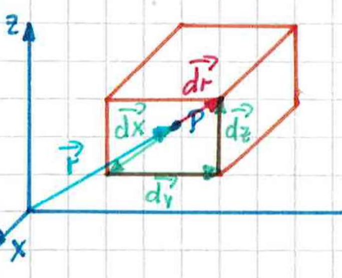
} oder

$\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{B}$, $|\vec{A}\times\vec{B}|$, $\vec{A}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} A_y \cdot B_z - B_y \cdot A_z \\ -(A_x \cdot B_z - A_z \cdot B_x) \\ A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y \cdot B_z - B_y \cdot A_z \\ A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y \end{pmatrix}$$

Koordinatensysteme

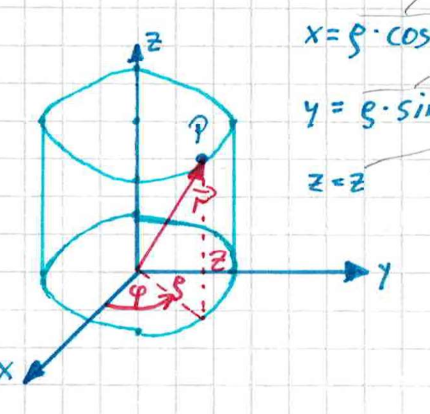
Kartesisches Koordinatensystem



$$\vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx \cdot \vec{e_x} + dy \cdot \vec{e_y} + dz \cdot \vec{e_z}$$

$$|\vec{dr}| = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Zylinderkoordinaten



$x = \varrho \cdot \cos\varphi$

$y = \varrho \cdot \sin\varphi$

$z = z$

(Ableiten)

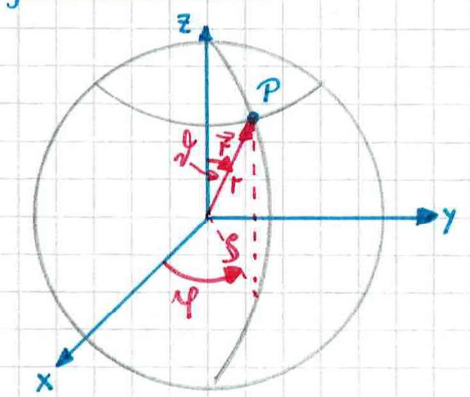
$$\vec{dr} = d\varrho \cdot \vec{e_\varrho} + \varrho \cdot d\varphi \cdot \vec{e_\varphi} + dz \cdot \vec{e_z}$$

$h_\varrho = 1$,

$h_\varphi = \varrho$

$h_z = 1$

Kugelkoordinaten



$$\vec{dr} = dr \cdot \vec{e_r} + r \cdot d\vartheta \cdot \vec{e_\vartheta} + r \cdot \sin\vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e_\varphi}$$

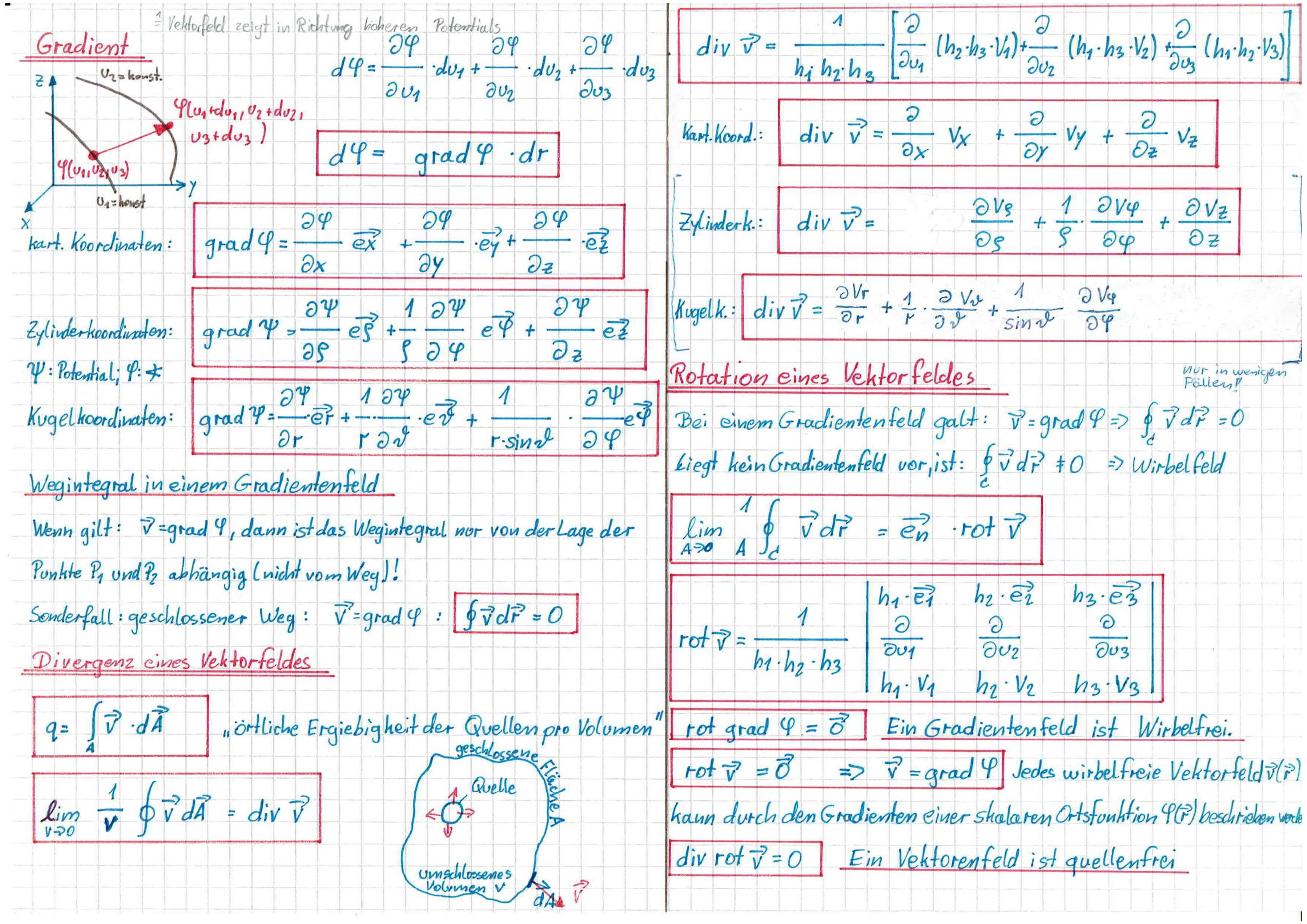
$h_r = 1$

$h_\vartheta = r$

$h_\varphi = r \cdot \sin\vartheta$

$x = \varrho \cdot \cos\varphi = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$; $\varrho = r \cdot \sin\vartheta$

$y = \varrho \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$; $z = r \cdot \cos\vartheta$



≙ Vektorfeld zeigt in Richtung höheren Potentials

Gradient

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \cdot du_3$$

$$d\varphi = \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{r}$$

kart. Koordinaten:
$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{e_y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{e_z}$$

Zylinderkoordinaten:
$$\operatorname{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e_\varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e_z}$$

ψ: Potential; φ: *

Kugelkoordinaten:
$$\operatorname{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \vec{e_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e_\varphi}$$

Wegintegral in einem Gradientenfeld

Wenn gilt: $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$, dann ist das Wegintegral nur von der Lage der Punkte P_1 und P_2 abhängig (nicht vom Weg)!

Sonderfall: geschlossener Weg: $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$: $\oint \vec{v}\, d\vec{r} = 0$

Divergenz eines Vektorfeldes

$$q = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

„örtliche Ergiebigkeit der Quellen pro Volumen"

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint \vec{v}\, d\vec{A} = \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 \cdot h_3 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right]$$

Kart. Koord.:
$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z$$

Zylinderk.:
$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Kugelk.:
$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

nur in wenigen Fällen!

Rotation eines Vektorfeldes

Bei einem Gradientenfeld galt: $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi \Rightarrow \oint_c \vec{v}\, d\vec{r} = 0$

Liegt kein Gradientenfeld vor, ist: $\oint_c \vec{v}\, d\vec{r} \neq 0 \Rightarrow$ Wirbelfeld

$$\lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_c \vec{v}\, d\vec{r} = \vec{e_n} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \begin{vmatrix} h_1 \cdot \vec{e_1} & h_2 \cdot \vec{e_2} & h_3 \cdot \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 \cdot V_1 & h_2 \cdot V_2 & h_3 \cdot V_3 \end{vmatrix}$$

$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{0}$ Ein Gradientenfeld ist Wirbelfrei.

$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$ Jedes wirbelfreie Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ kann durch den Gradienten einer skalaren Ortsfunktion $\varphi(\vec{r})$ beschrieben werde

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ Ein Vektorenfeld ist quellenfrei

zu: Rotation eines Vektorfeldes

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$$

Jedes quellenfreie Vektorenfeld kann durch die Rotation einer vektoriellen Ortsfunktion $\vec{v}$ beschrieben werden.

kart. Koordinaten:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \\ \frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \\ \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot v_z - \varrho \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot v_\varphi \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} v_\varrho - \frac{\partial}{\partial \varrho} v_z \right) \cdot \varrho \\ v_\varphi + \varrho \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} v_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varrho \end{pmatrix}$$

Kugelkoord.:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\cot \vartheta}{r} \cdot v_\varphi + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} v_\varphi - \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot v_\vartheta \\ \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot v_r - \frac{1}{r} v_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} v_\varphi \\ \frac{1}{r} v_\vartheta + \frac{\partial}{\partial r} v_\vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} v_r \end{pmatrix}$$

Gaußscher Satz

Das Volumenintegral der Ergiebigkeit eines Vektorfeldes ist gleich dem Flächenintegral der Hüllfläche des umschlossenen Volumens.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \oint_A \vec{v} \, d\vec{A}$$

Integralsatz von Stokes

Das Flächenintegral der Wirbel eines Vektorfeldes ist gleich dem Wegintegral über die Randkurve der Fläche.

$$\int_C \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{A} = \oint_C \vec{v} \, d\vec{r}$$

Laplace-Operator

Def: $\Delta \varphi \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$

kart. K.: $$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

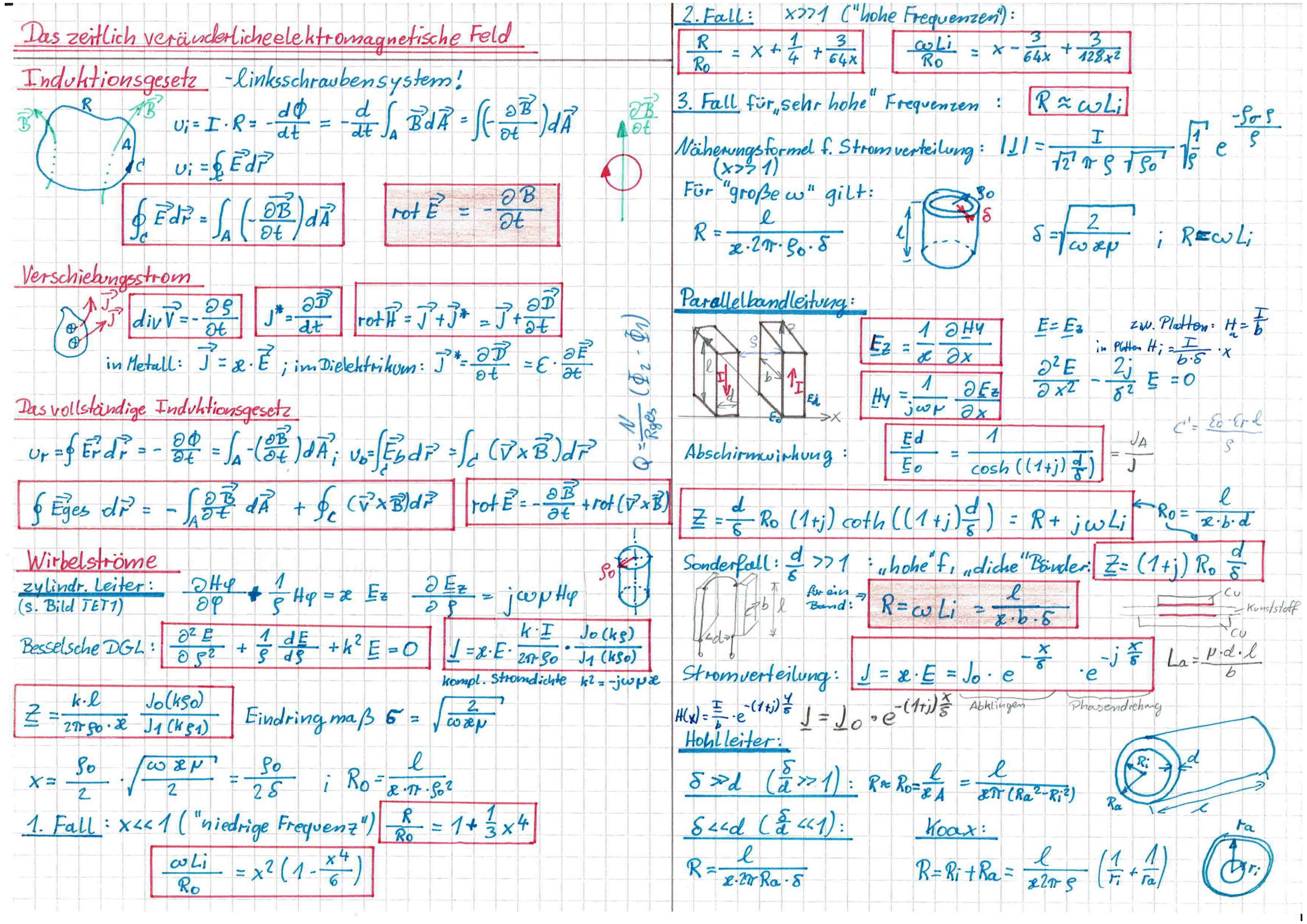
Zylinderk.: $$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

Kugelk.: $$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$$

$$\Delta \Psi = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$$

(Annotation: $\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \cot\vartheta$)

mit Vorsicht!



Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld

Induktionsgesetz – Linksschraubensystem!

$$u_i = I \cdot R = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\,d\vec{A} = \int\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)d\vec{A}$$

$$u_i = \oint_C \vec{E}\,d\vec{r}$$

$$\oint_C \vec{E}\,d\vec{r} = \int_A\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)d\vec{A} \qquad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Verschiebungsstrom

$$\text{div}\,\vec{V} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \qquad J^* = \frac{\partial \vec{D}}{dt} \qquad \text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}^* = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

in Metall: $\vec{J} = \varkappa \cdot \vec{E}$; im Dielektrikum: $\vec{J}^* = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$Q = \frac{N}{R_{ges}}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

Das vollständige Induktionsgesetz

$$u_r = \oint \vec{E_r}\,d\vec{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_A -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)d\vec{A}; \quad u_b = \oint_C \vec{E_b}\,d\vec{r} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B})\,d\vec{r}$$

$$\oint \vec{E}_{ges}\,d\vec{r} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{A} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B})\,d\vec{r} \qquad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})$$

Wirbelströme

zylindr. Leiter: (s. Bild TET1)

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}H_\varphi = \varkappa\,E_z \qquad \frac{\partial E_z}{\partial \varrho} = j\omega\mu H_\varphi$$

Besselsche DGL: $$\frac{\partial^2 E}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dE}{d\varrho} + k^2 E = 0 \qquad \underline{J} = \varkappa \cdot E \cdot \frac{k \cdot I}{2\pi\varrho_0} \cdot \frac{J_0(k\varrho)}{J_1(k\varrho_0)}$$

kompl. Stromdichte $k^2 = -j\omega\mu\varkappa$

$$\underline{Z} = \frac{k \cdot l}{2\pi\varrho_0 \cdot \varkappa}\frac{J_0(k\varrho_0)}{J_1(k\varrho_1)} \qquad \text{Eindringmaß } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\varkappa\mu}}$$

$$x = \frac{\varrho_0}{2}\cdot\sqrt{\frac{\omega\varkappa\mu}{2}} = \frac{\varrho_0}{2\delta}; \quad R_0 = \frac{l}{\varkappa \cdot \pi \cdot \varrho_0^2}$$

1. Fall: $x \ll 1$ ("niedrige Frequenz") $$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{3}x^4 \qquad \frac{\omega L_i}{R_0} = x^2\left(1 - \frac{x^4}{6}\right)$$

2. Fall: $x \gg 1$ ("hohe Frequenzen"): $$\frac{R}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} \qquad \frac{\omega L_i}{R_0} = x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2}$$

3. Fall für „sehr hohe" Frequenzen: $R \approx \omega L_i$

Näherungsformel f. Stromverteilung ($x \gg 1$): $$|\underline{J}| = \frac{I}{\sqrt{2}\,\pi\,\varrho\,\sqrt{\varrho_0}}\sqrt{\frac{1}{\varrho}}\,e^{-\frac{\varrho_0 - \varrho}{\delta}}$$

Für "große ω" gilt: $$R = \frac{l}{\varkappa \cdot 2\pi \cdot \varrho_0 \cdot \delta} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\varkappa\mu}}; \quad R = \omega L_i$$

Parallelbandleitung:

$$\underline{E}_z = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial H_y}{\partial x} \qquad \underline{H}_y = \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

$E = E_z$; zw. Platten: $H_a = \frac{I}{b}$; in Platten $H_i = \frac{I}{b \cdot \delta} \cdot x$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2}\underline{E} = 0 \qquad C' = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{s}$$

Abschirmwirkung: $$\frac{E_d}{E_0} = \frac{1}{\cosh\left((1+j)\frac{d}{\delta}\right)} = \frac{J_A}{J}$$

$$\underline{Z} = \frac{d}{\delta}R_0\,(1+j)\coth\left((1+j)\frac{d}{\delta}\right) = R + j\omega L_i \qquad R_0 = \frac{l}{\varkappa \cdot b \cdot d}$$

Sonderfall: $\frac{d}{\delta} \gg 1$: „hohe" f, „dicke" Bänder: $\underline{Z} = (1+j)\,R_0\,\frac{d}{\delta}$

für ein Band: $$R = \omega L_i = \frac{l}{\varkappa \cdot b \cdot \delta}$$

Cu / Kunststoff / Cu

$$L_a = \frac{\mu \cdot d \cdot l}{b}$$

Stromverteilung: $$\underline{J} = \varkappa \cdot \underline{E} = J_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{x}{\delta}}$$ (Abklingen, Phasendrehung)

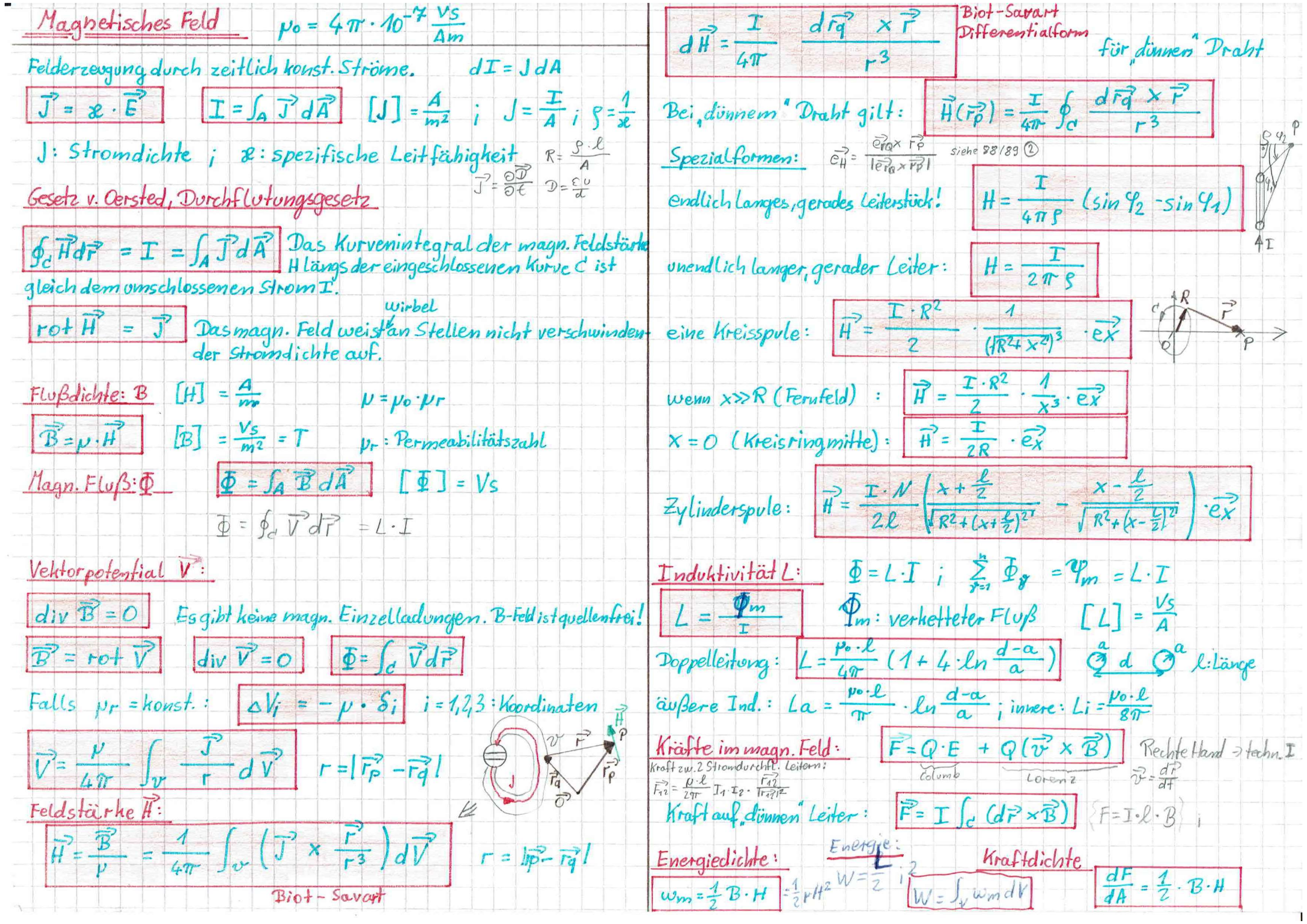
$$H(x) = \frac{I}{b}\cdot e^{-(1+j)\frac{y}{\delta}} \qquad \underline{J} = \underline{J}_0 \cdot e^{-(1+j)\frac{x}{\delta}}$$

Hohlleiter:

$\delta \gg d$ ($\frac{\delta}{d} \gg 1$): $$R \approx R_0 = \frac{l}{\varkappa A} = \frac{l}{\varkappa\pi(R_a^2 - R_i^2)}$$

$\delta \ll d$ ($\frac{\delta}{d} \ll 1$): $$R = \frac{l}{\varkappa \cdot 2\pi R_a \cdot \delta}$$

Koax: $$R = R_i + R_a = \frac{l}{\varkappa 2\pi\delta}\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a}\right)$$



Magnetisches Feld $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

Felderzeugung durch zeitlich konst. Ströme. $dI = J\,dA$

$\vec J = \varkappa \cdot \vec E$ $I = \int_A \vec J\, d\vec A$ $[J] = \frac{A}{m^2}$; $J = \frac{I}{A}$; $\varrho = \frac{1}{\varkappa}$

J: Stromdichte ; $\varkappa$: spezifische Leitfähigkeit $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$

$\vec J = \frac{\partial \vec D}{\partial t}$ $D = \frac{\varepsilon U}{d}$

Gesetz v. Oersted, Durchflutungsgesetz

$\oint_C \vec H\, d\vec r = I = \int_A \vec J\, d\vec A$ Das Kurvenintegral der magn. Feldstärke H längs der eingeschlossenen Kurve C ist gleich dem umschlossenen Strom I.

$\text{rot}\,\vec H = \vec J$ Das magn. Feld weist Wirbel an Stellen nicht verschwindender Stromdichte auf.

Flußdichte: B

$[H] = \frac{A}{m}$ $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

$\vec B = \mu \cdot \vec H$ $[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$ μ_r: Permeabilitätszahl

Magn. Fluß: Φ $\Phi = \int_A \vec B\, d\vec A$ $[\Phi] = Vs$

$\Phi = \oint_C \vec V\, d\vec r = L \cdot I$

Vektorpotential $\vec V$:

$\text{div}\,\vec B = 0$ Es gibt keine magn. Einzelladungen. B-Feld ist quellenfrei!

$\vec B = \text{rot}\,\vec V$ $\text{div}\,\vec V = 0$ $\Phi = \oint_C \vec V\, d\vec r$

Falls μ_r = konst.: $\Delta V_i = -\mu \cdot S_i$ i = 1,2,3: Koordinaten

$\vec V = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec J}{r}\, dV$ $r = |\vec r_P - \vec r_Q|$

Feldstärke $\vec H$:

$\vec H = \frac{\vec B}{\mu} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\vec J \times \frac{\vec r}{r^3}\right) dV$ $r = |\vec r_P - \vec r_Q|$

Biot-Savart

$d\vec H = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec r_Q \times \vec r}{r^3}$ Biot-Savart Differentialform für „dünnen" Draht

Bei „dünnem" Draht gilt: $\vec H(\vec r_P) = \frac{I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec r_Q \times \vec r}{r^3}$

Spezialformen:

$\vec e_H = \frac{\vec e_{rQ} \times \vec r_P}{|\vec e_{rQ} \times \vec r_P|}$ siehe 88/89 ②

endlich langes, gerades Leiterstück! $H = \frac{I}{4\pi\varrho}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$

unendlich langer, gerader Leiter: $H = \frac{I}{2\pi\varrho}$

eine Kreisspule: $\vec H = \frac{I \cdot R^2}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{R^2+x^2})^3} \cdot \vec e_x$

wenn x >> R (Fernfeld): $\vec H = \frac{I \cdot R^2}{2}\cdot\frac{1}{x^3}\cdot \vec e_x$

x = 0 (Kreisringmitte): $\vec H = \frac{I}{2R}\cdot \vec e_x$

Zylinderspule: $\vec H = \frac{I \cdot N}{2l}\left(\frac{x+\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2+(x+\frac{l}{2})^2}} - \frac{x-\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2+(x-\frac{l}{2})^2}}\right)\cdot\vec e_x$

Induktivität L:

$\Phi = L\cdot I$; $\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu = \Psi_m = L\cdot I$

$L = \frac{\Psi_m}{I}$ Ψ_m: verketteter Fluß $[L] = \frac{Vs}{A}$

Doppelleitung: $L = \frac{\mu_0 \cdot l}{4\pi}\left(1 + 4\cdot\ln\frac{d-a}{a}\right)$ l: Länge

äußere Ind.: $L_a = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi}\cdot\ln\frac{d-a}{a}$; innere: $L_i = \frac{\mu_0 \cdot l}{8\pi}$

Kräfte im magn. Feld:

$\vec F = Q\cdot E + Q(\vec v \times \vec B)$ (Columb / Lorenz) Rechte Hand → techn. I $\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$

Kraft zw. 2 Stromdurchfl. Leitern: $\vec F_{12} = \frac{\mu \cdot l}{2\pi} I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{\vec r_{12}}{|\vec r_{12}|^2}$

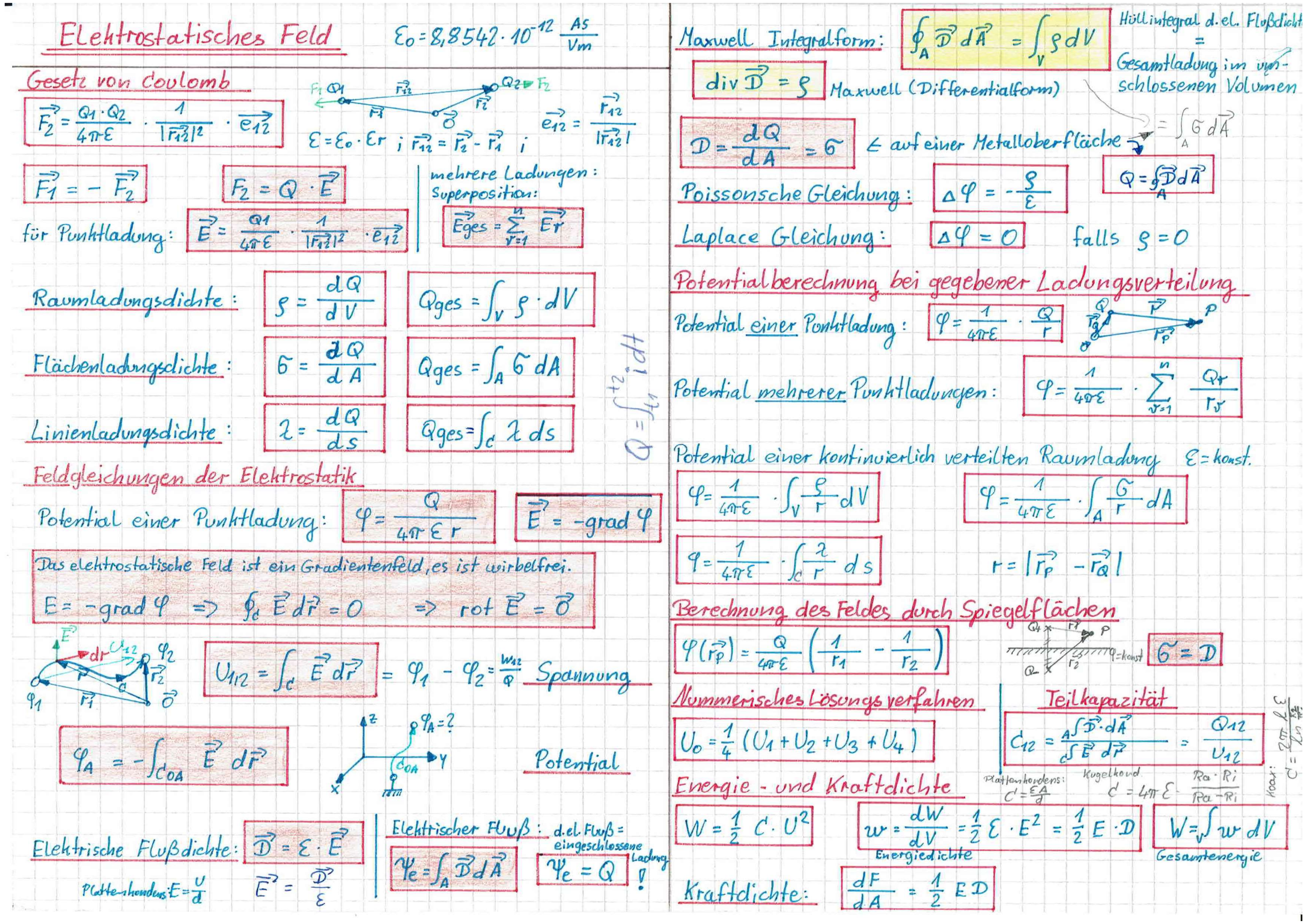
Kraft auf „dünnen" Leiter: $\vec F = I\int_C (d\vec r \times \vec B)$ $\{F = I\cdot l\cdot B\}$

Energiedichte:

$w_m = \frac{1}{2} B\cdot H = \frac{1}{2}\mu H^2$

Energie: $W = \frac{L}{2} I^2$ $W = \int_V w_m\, dV$

Kraftdichte: $\frac{dF}{dA} = \frac{1}{2}\cdot B\cdot H$



Elektrostatisches Feld

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Gesetz von Coulomb

$$\vec{F_2} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{|\vec{r_{12}}|^2} \cdot \vec{e_{12}}$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$; $\vec{r_{12}} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$; $\vec{e_{12}} = \frac{\vec{r_{12}}}{|\vec{r_{12}}|}$

$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$ $\quad$ $F_2 = Q \cdot \vec{E}$

für Punktladung: $\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{|\vec{r_{12}}|^2} \cdot \vec{e_{12}}$

mehrere Ladungen: Superposition: $\vec{E_{ges}} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{E_\nu}$

Raumladungsdichte: $\rho = \frac{dQ}{dV}$ $\quad$ $Q_{ges} = \int_V \rho \cdot dV$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ $\quad$ $Q_{ges} = \int_A \sigma \, dA$

Linienladungsdichte: $\lambda = \frac{dQ}{ds}$ $\quad$ $Q_{ges} = \int_C \lambda \, ds$

$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt$

Feldgleichungen der Elektrostatik

Potential einer Punktladung: $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$ $\quad$ $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$

Das elektrostatische Feld ist ein Gradientenfeld, es ist wirbelfrei.

$E = -\text{grad}\,\varphi \Rightarrow \oint_C \vec{E}\, d\vec{r} = 0 \Rightarrow \text{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$

$U_{12} = \int_C \vec{E}\, d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_{12}}{Q}$ Spannung

$\varphi_A = -\int_{C_{0A}} \vec{E}\, d\vec{r}$ Potential

Elektrische Flußdichte: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

Plattenkondens.: $E = \frac{U}{d}$ $\quad$ $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$

Elektrischer Fluß: $\Psi_e = \int_A \vec{D}\, d\vec{A}$ $\quad$ d. el. Fluß = eingeschlossene Ladung! $\quad$ $\Psi_e = Q$

Maxwell

Maxwell Integralform: $\oint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$

Hüllintegral d. el. Flußdichte = Gesamtladung im umschlossenen Volumen

$\text{div}\,\vec{D} = \rho$ Maxwell (Differentialform)

$D = \frac{dQ}{dA} = \sigma$ ← auf einer Metalloberfläche → $= \int_A \sigma \, d\vec{A}$

$Q = \oint_A \vec{D}\, d\vec{A}$

Poissonsche Gleichung: $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Laplace Gleichung: $\Delta\varphi = 0$ falls $\rho = 0$

Potentialberechnung bei gegebener Ladungsverteilung

Potential einer Punktladung: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r}$

Potential mehrerer Punktladungen: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{Q_\nu}{r_\nu}$

Potential einer kontinuierlich verteilten Raumladung ε = konst.

$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_V \frac{\rho}{r} dV$ $\quad$ $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_A \frac{\sigma}{r} dA$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_C \frac{\lambda}{r} ds$ $\quad$ $r = |\vec{r_P} - \vec{r_Q}|$

Berechnung des Feldes durch Spiegelflächen

$\varphi(\vec{r_P}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ $\quad$ φ = konst $\quad$ $\sigma = D$

Nummerisches Lösungsverfahren

$U_0 = \frac{1}{4}(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$

Teilkapazität

$C_{12} = \frac{\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_C \vec{E}\, d\vec{r}} = \frac{Q_{12}}{U_{12}}$

Plattenkondens.: $C = \frac{\varepsilon A}{d}$ $\quad$ Kugelkond.: $C = 4\pi\varepsilon \frac{R_a \cdot R_i}{R_a - R_i}$ $\quad$ Koax: $C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_a}{R_i}}$

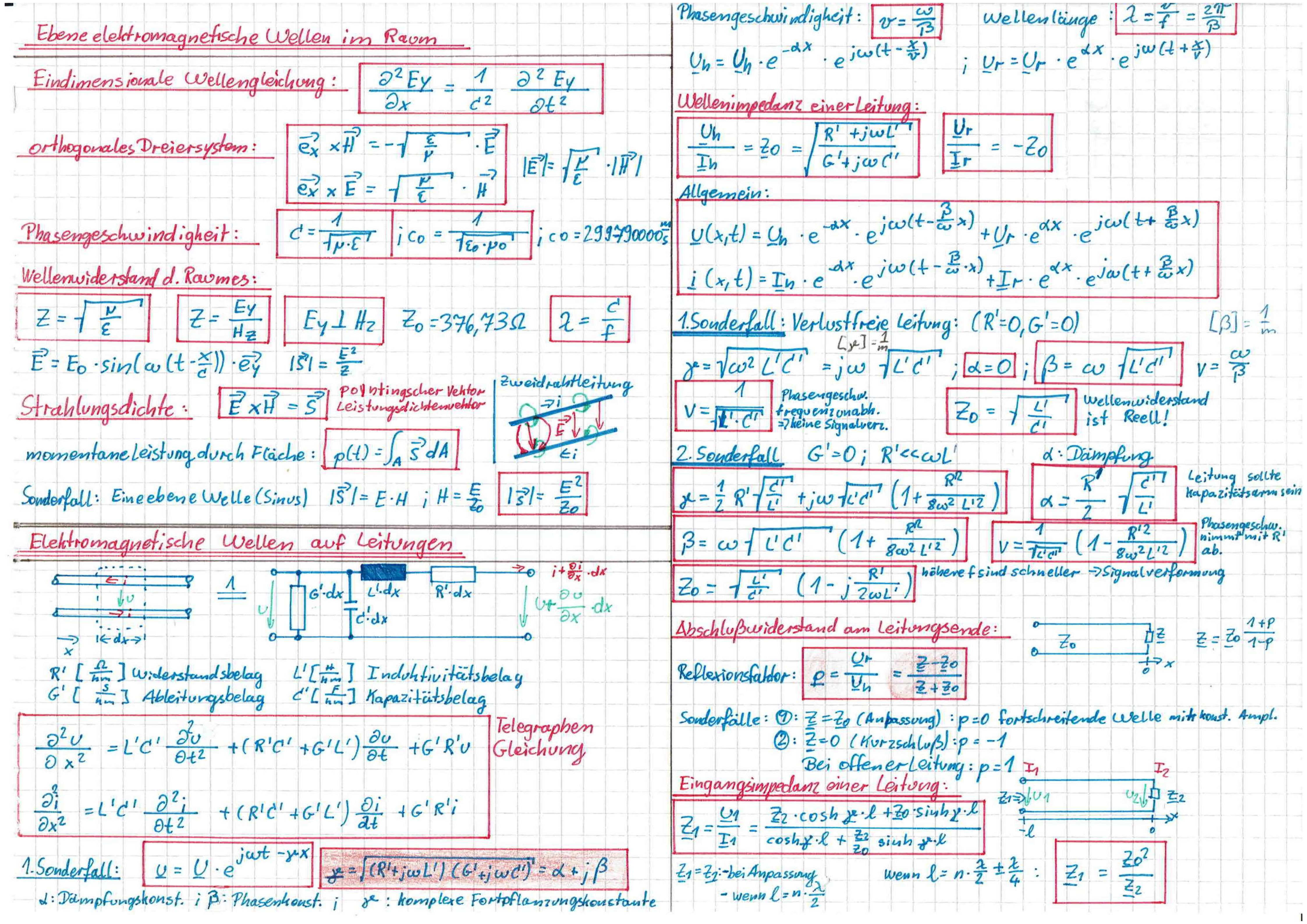
Energie- und Kraftdichte

$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$

$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} E \cdot D$ Energiedichte

$W = \int_V w \, dV$ Gesamtenergie

Kraftdichte: $\frac{dF}{dA} = \frac{1}{2} E D$



Ebene elektromagnetische Wellen im Raum

Eindimensionale Wellengleichung: $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$

orthogonales Dreiersystem:
$\vec{e_x} \times \vec{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}$
$\vec{e_x} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \vec{H}$
$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot |\vec{H}|$

Phasengeschwindigkeit: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$; $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$; $c_0 = 299790000 \frac{m}{s}$

Wellenwiderstand d. Raumes:
$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$; $Z = \frac{E_y}{H_z}$; $E_y \perp H_z$; $Z_0 = 376{,}73\,\Omega$; $\lambda = \frac{c}{f}$

$\vec{E} = E_0 \cdot \sin(\omega(t - \frac{x}{c})) \cdot \vec{e_y}$; $|\vec{S}| = \frac{E^2}{Z}$

Strahlungsdichte: $\vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}$ Poyntingscher Vektor, Leistungsdichtevektor

Zweidrahtleitung (Skizze: $\vec{i}$, $\vec{E}$, ϵ_i)

momentane Leistung durch Fläche: $p(t) = \int_A \vec{S}\, dA$

Sonderfall: Eine ebene Welle (Sinus) $|\vec{S}| = E \cdot H$; $H = \frac{E}{Z_0}$; $|\vec{S}| = \frac{E^2}{Z_0}$

Elektromagnetische Wellen auf Leitungen

(Skizze: Leitung mit i, u, dx, x $\triangleq$ Ersatzschaltbild mit $G' \cdot dx$, $C' \cdot dx$, $L' \cdot dx$, $R' \cdot dx$; u, $i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx$, $u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$)

$R'\ [\frac{\Omega}{km}]$ Widerstandsbelag $L'\ [\frac{H}{km}]$ Induktivitätsbelag
$G'\ [\frac{S}{km}]$ Ableitungsbelag $C'\ [\frac{F}{km}]$ Kapazitätsbelag

Telegraphen Gleichung
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L'C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R'C' + G'L')\frac{\partial u}{\partial t} + G'R'u$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L'C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (R'C' + G'L')\frac{\partial i}{\partial t} + G'R'i$$

1. Sonderfall: $u = U \cdot e^{j\omega t - \gamma x}$; $\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$

α: Dämpfungskonst. ; β: Phasenkonst. ; γ: komplexe Fortpflanzungskonstante

Phasengeschwindigkeit: $v = \frac{\omega}{\beta}$ **Wellenlänge:** $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$

$\underline{U}_h = \underline{U}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j\omega(t - \frac{x}{v})}$; $\underline{U}_r = \underline{U}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\omega(t + \frac{x}{v})}$

Wellenimpedanz einer Leitung:
$\frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$; $\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = -Z_0$

Allgemein:
$$\underline{u}(x,t) = \underline{U}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j\omega(t - \frac{\beta}{\omega}x)} + \underline{U}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\omega(t + \frac{\beta}{\omega}x)}$$
$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j\omega(t - \frac{\beta}{\omega}x)} + \underline{I}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\omega(t + \frac{\beta}{\omega}x)}$$

1. Sonderfall: Verlustfreie Leitung: $(R' = 0, G' = 0)$ $[\beta] = \frac{1}{m}$

$\gamma = \sqrt{\omega^2 L'C'} = j\omega\sqrt{L'C'}$; $[\gamma] = \frac{1}{m}$; $\alpha = 0$; $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$; $v = \frac{\omega}{\beta}$

$v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$ Phasengeschw. frequenzunabh. ⇒ keine Signalverz.

$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ Wellenwiderstand ist Reell!

2. Sonderfall $G' = 0$; $R' \ll \omega L'$ α : Dämpfung

$\gamma = \frac{1}{2}R'\sqrt{\frac{C'}{L'}} + j\omega\sqrt{L'C'}\left(1 + \frac{R'^2}{8\omega^2 L'^2}\right)$

$\alpha = \frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C'}{L'}}$ Leitung sollte kapazitätsarm sein

$\beta = \omega\sqrt{L'C'}\left(1 + \frac{R'^2}{8\omega^2 L'^2}\right)$

$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}\left(1 - \frac{R'^2}{8\omega^2 L'^2}\right)$ Phasengeschw. nimmt mit R' ab.

$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\left(1 - j\frac{R'}{2\omega L'}\right)$ höhere f sind schneller → Signalverformung

Abschlußwiderstand am Leitungsende:

(Skizze: Leitung Z_0, Abschluss $\underline{Z}$, 0, x) $\underline{Z} = Z_0 \frac{1+\rho}{1-\rho}$

Reflexionsfaktor: $\rho = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_0}$

Sonderfälle: ①: $\underline{Z} = \underline{Z}_0$ (Anpassung): $\rho = 0$ fortschreitende Welle mit konst. Ampl.
②: $\underline{Z} = 0$ (Kurzschluß): $\rho = -1$
Bei offener Leitung: $\rho = 1$

Eingangsimpedanz einer Leitung:

(Skizze: I_1, I_2, $\underline{Z}_1$, U_1, U_2, $\underline{Z}_2$, $-l$, 0, x)

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \cosh \gamma \cdot l + \underline{Z}_0 \sinh \gamma \cdot l}{\cosh \gamma \cdot l + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}\sinh \gamma \cdot l}$$

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$: - bei Anpassung
- wenn $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$

Wenn $l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{4}$: $\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_0^2}{\underline{Z}_2}$

Weitere Formeln zu TET

zur Integration

	Zylinder	Kugel	Kreis
$dV \Rightarrow dr$	$2\pi r l \, dr$	$4\pi r^2 dr$	—
$dA \Rightarrow dr$	$2\pi l \, dr$ (Mantel)	$8\pi r \, dr$	$2\pi r \, dr$
$dV \Rightarrow dr \, d\Theta \, d\varphi$	—	$r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$ *	—
$dA \Rightarrow d\Theta \, d\varphi$	—	$r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ *	—
$dA \Rightarrow dr \, d\varphi$	$r \, dr \, d\varphi$ (Kreisfläche)	—	$r \, dr \, d\varphi$
$dV \Rightarrow dr \, d\varphi \, dz$	$r \, dr \, d\varphi \, dz$	—	—

* ≙ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \vartheta \leq \pi$ | bei Halbkugel: „$\cdot \frac{1}{2}$"

$W_R = R \, i^2$

$W_m = \frac{1}{2} L \, i^2$

$W_e = \frac{1}{2} C \, i^2$

91 ⑥

$H_i = \frac{r}{2\pi \cdot R^2} \cdot I$

I

Fach: TET Datum: 21.5.95

4.3 Maxwellsche Gleichungen

Differentialform		Integralform
$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Durchflutungsgesetz	$\oint_{C} \vec{H}\,d\vec{r} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\vec{A}$
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Induktionsgesetz	$\oint_{C} \vec{E}\,d\vec{r} = \int_A \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{A}$
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	Es gibt keine magn. Einzelpole	$\oint_A \vec{B}\,d\vec{A} = 0$
$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$		$\oint \vec{D}\,dA = \int \rho\,dv = Q$

Materialgleichungen:

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$; $\vec{J} = \varkappa \cdot \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Falls sich Größen sinusförmig mit der Zeit ändern:

$$F(t) = \hat{F} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{\underbrace{\hat{F} \cdot e^{j\varphi}}_{\hat{\underline{F}}} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\underline{F} = \frac{\hat{E}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega\underline{\vec{D}} = (\varkappa + j\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} \quad ; \quad \mathrm{div}\,\underline{\vec{B}} = 0 \; ; \quad \mathrm{div}\,\underline{\vec{D}} = \rho$$

Fach: TET Datum: 21.5.95

Sonderfälle:

1. $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \omega = 0$; $\vec{J} = 0$

   $\text{rot}\,\vec{E} = 0$; $\text{div}\,\vec{D} = \varrho$ Elektrostatik

2. $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \omega = 0$; $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$

   $\text{div}\,\vec{B} = 0$

   Magnetostatik

3. $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J}$; "ω ist klein"

   $\text{rot}\,\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$; $\text{div}\,\vec{B} = 0$

   $\text{div}\,\vec{D} = \varrho$ quasistationäre Ströme z.B. Skineffekt

4. "höhere Frequenzen", $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ nicht mehr vernachlässigbar „instationäre" Ströme

   z.B. Wellenausbreitung, Strahlung